GRUNDWISSEN 9. KLASSE – EINHEIT 1

Reelle Zahlen, Quadratische Funktionen und Gleichungen, Lineare Gleichungssysteme mit 3 Variablen

Reelle Zahlen

Quadratwurzel: $\sqrt{a}$ ist die nicht-negative Lösung der Gleichung $x^2 = a$, also $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$.

Merke: a heißt **Radikand** und darf nicht negativ sein!

Rechnen mit Quadratwurzeln:

Rechenregeln: $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}$

$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$

Gilt nicht bei Summen und Differenzen!

Bsp.: $\sqrt{16+9} = 5$ aber $\sqrt{16}+\sqrt{9} = 7$

Teilweise Radizieren:

Bsp.: $\sqrt{a^5} = \sqrt{a^2 \cdot a^3} = |a| \cdot \sqrt{a^3}$

Unter die Wurzel ziehen:

Bsp.: $3\sqrt{5} = \sqrt{3^2}\cdot\sqrt{5} = \sqrt{9\cdot 5} = \sqrt{45}$

Potenzen mit rationalen Exponenten:

$\sqrt[n]{a}$ ist die nicht-negative Lösung der Gleichung $x^n = a$, also $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$

Potenzschreibweise: $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$, wobei $a \geq 0, n \in N$

$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} = \left(\sqrt[q]{a}\right)^p$, wobei $a \geq 0, p \in Z, q \in N$

Bsp.: $x^{\frac{2}{3}} = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2 = \left(\sqrt[3]{x}\right)^2 = \sqrt[3]{x^2}$, wobei $x \geq 0$

Merke: $a^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}$

Binomische Formeln:

Plus-Formel: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Minus-Formel: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Plusminus-Formel: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Quadratische Funktionen

Allgemeine Form der quadratischen Funktionen: $f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$

Durch quadratische Ergänzung Überführung in die **Scheitelform**:

$f(x) = a(x - x_s)^2 + y_s$ mit dem Scheitel $S(x_s;y_s)$

Bsp: $f(x) = 2x^2 + 8x - 1 = 2(x^2 + 4x) - 1 = 2(x^2 + 4x + 4 - 4) - 1 =$

$2(x^2 + 4x + 4) - 8 - 1 = 2(x + 2)^2 - 9$

Zerlegung in **Linearfaktoren** mit Hilfe vorhandener Nullstellen x_1 und x_2:

$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

Bsp.: $f(x) = 2x^2 + 4x - 6$,

die Lösungsformel liefert die Nullstellen $x_1 = -3$ und $x_2 = 1$

$\Rightarrow f(x) = 2(x + 3)(x - 1)$

Der Graph einer quadratischen Funktion ist eine **Parabel**.

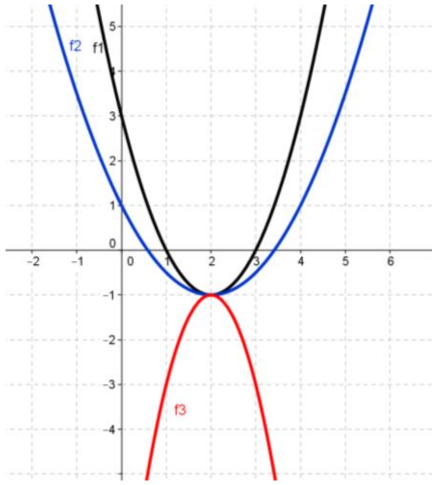
Der Graph von $f(x) = x^2$ heißt **Normalparabel**.

Bsp.:

$f_1(x) = (x - 2)^2 - 1$ $\quad$ $(a = 1)$

$f_2(x) = 0{,}5(x - 2)^2 - 1$ $\quad$ $(a = 0{,}5)$

$f_3(x) = -2(x - 2)^2 - 1$ $\quad$ $(a = -2)$



Quadratische Gleichungen

Normalform: $ax^2 + bx + c = 0$

Die Lösungen erhält man über die **Lösungsformel**:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Die Anzahl der Lösungen erhält man durch Untersuchung der **Diskriminante**

$D = b^2 - 4ac$:

$D>0$: 2 Lösungen

$D=0$: 1 Lösung

$D<0$: keine Lösung

Sonderfälle:

$c=0$: x ausklammern

Bsp.: $x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow x(x + 3) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = -3$

$b=0$: nach x auflösen

Bsp.: $2x^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 8 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 2$

Lineare Gleichungssysteme mit 3 Variablen

Bsp.: I $2a + 3b - c = -6$

II $a - b + 2c = 4$

III $5a + 4b - 2c = 1$

II + III $a - b + 2c + 5a + 4b - 2c = 4 + 1$ => $6a + 3b = 5$

2I + II $4a + 6b - 2c + a - b + 2c = -12 + 4$ =>$5a + 5b = -8$

Das entstehende Gleichungssystem mit 2 Variablen wird nach den bekannten Verfahren aus der 8. Jahrgangsstufe gelöst.