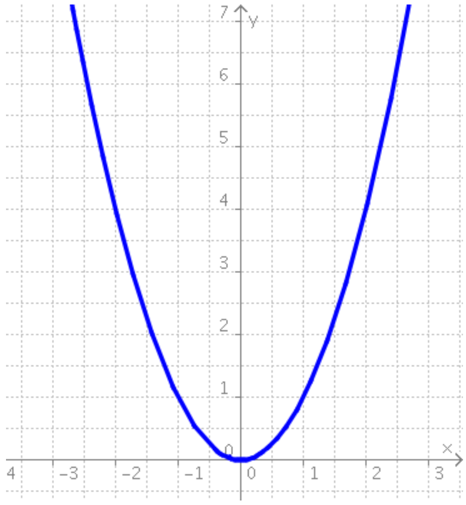
GRUNDWISSEN 8. KLASSE – EINHEIT 1

FUNKTIONALE ZUSAMMENHÄNGE, LINEARE FUNKTIONEN, LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME MIT 2 UNBEKANNTEN

FUNKTIONALE ZUSAMMENHÄNGE

Eine Zuordnung x $\longmapsto$ y, die jedem x aus einer **Definitionsmenge** $\mathbb{D}$ genau ein y aus der **Wertemenge** $\mathbb{W}$ zuordnet heißt Funktion. Man schreibt dann auch $f: x \longmapsto y$ für die **Funktionsvorschrift** und $f(x) = y$ für den **Funktionsterm**. Graphen von Funktionen werden von jeder Parallelen zur y-Achse höchstens einmal geschnitten.

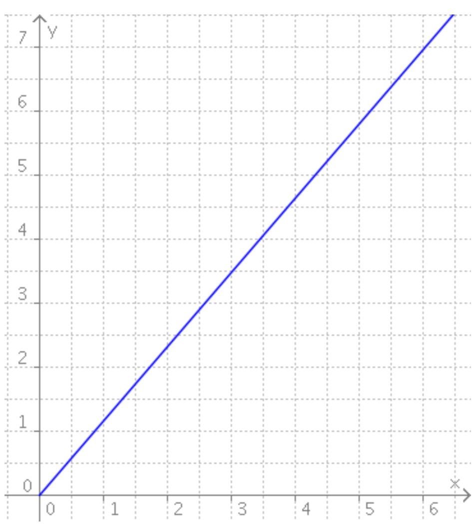
Bsp.: $f: x \longmapsto y = x^2$ bzw. $f(x) = y = x^2$ mit $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ und $\mathbb{W} = \mathbb{R}_0^+$



Direkte Proportionalität

Zwei Größen x und y sind **direkt proportional** zueinander, wenn dem doppelten, dreifachen, … Wert der einen Größe x der doppelte, dreifache, … Wert der anderen Größe y zugeordnet wird. Der Quotient $\frac{y}{x} = m$ der beiden Größen ist immer konstant. Der Wert m heißt **Proportionalitätsfaktor**. Der **Graph** einer direkt proportionalen Zuordnung ist eine **Ursprungshalbgerade** mit der Steigung m.

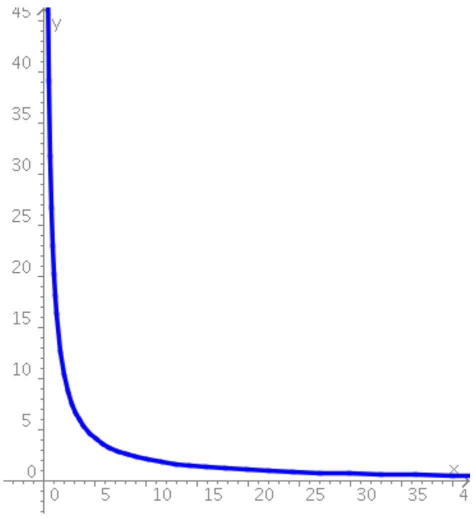
Bsp.: Benzin in ℓ $(x) \longmapsto$ Preis in € (y); $m = \frac{y}{x} = \frac{Preis}{Liter}$. 7 ℓ Benzin kosten 7,84 €. Was muss man für 20 ℓ bezahlen? $m = 7{,}84\text{ €} : 7\ l = 1{,}12\frac{\text{€}}{l}$. $y = m \cdot x = 1{,}12\frac{\text{€}}{l} \cdot 20\ l = 22{,}40\text{ €}$.



Indirekte Proportionalität

Zwei Größen x und y sind **indirekt proportional** zueinander, wenn dem doppelten, dreifachen, … Wert der einen Größe x die Hälfte, der dritte Teil, … der anderen Größe y zugeordnet wird. Das Produkt $k = y \cdot x$ der beiden Größen ist konstant. Der **Graph** einer indirekt proportionalen Zuordnung ist ein **Hyperbelast**.

Bsp.: Zahl der Arbeiter $(x) \longmapsto$ Arbeitszeit in h (y); $k = y \cdot x = Zeit \cdot Zahl\ Arbeiter$.
3 Arbeiter benötigen 7 h für eine Arbeit. Wie lange benötigen 5 Arbeiter?
$k = 3 \cdot 7\ h = 21\ h.\ y = \frac{k}{x} = \frac{21\ h}{5} = 4{,}2\ h = 4\ h\ 12\ min.$

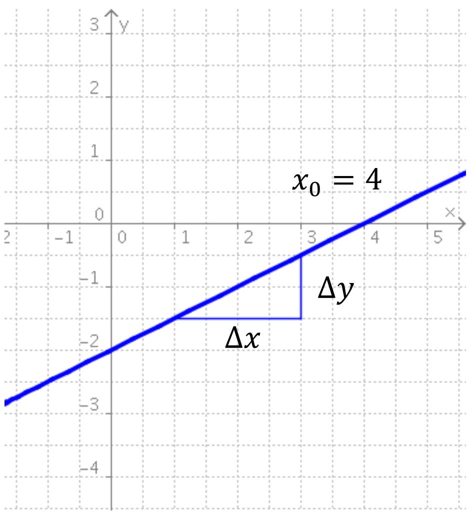


LINEARE FUNKTIONEN

Grundbegriffe

Der Graph einer **linearen Funktion** $f: x \longmapsto y = m \cdot x + t$ bzw. $f(x) = m \cdot x + t$ ist eine Gerade mit **Steigung** m und **y-Abschnitt** t. Die Definitionsmenge $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$ und die Wertemenge $\mathbb{W}_f = \mathbb{R}$. Man nennt den Funktionsterm $f(x) = y = m \cdot x + t$ auch **Geradengleichung**.

Bsp.: $f(x) = \frac{1}{2}x - 2;\ \mathbb{D}_f = \mathbb{R}.$



Nullstelle und Steigung

Die **Nullstelle** x_0 einer linearen Funktion $f(x) = m \cdot x + t$ ist derjenige x-Wert für den $f(x_0) = 0$ bzw. die Gerade die x-Achse schneidet.

Die **Steigung** m einer linearen Funktion berechnet man mit Hilfe eines **Steigungsdreiecks**. Dabei gilt: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Je größer $|m|$ ist, desto **steiler** ist die Gerade. Für $m < 0$ **fällt**, für $m > 0$ **steigt** die Gerade und für $m = 0$ verläuft sie **parallel zur x-Achse**. Alle Geraden mit gleicher Steigung m sind **parallel**.

Besondere Geraden ($a \in \mathbb{R}$)

Geradengleichung	Geradenart	Funktion
$y = ax$	Ursprungsgerade	Ja
$y = x$	Winkelhalbierende des I. und III. Quadranten	Ja
$y = -x$	Winkelhalbierende des II. und IV. Quadranten	Ja
$y = a$	Parallele zur x-Achse durch (0 | a)	Ja
$x = a$	Parallele zur y-Achse durch (a | 0)	Nein

Punkt auf Geraden

Ein Punkt $P(w|z)$ liegt auf einer Geraden $g(x) = y = mx + t$, wenn seine Koordinaten die Geradengleichung erfüllen: $g(w) = mw + t = z$. (Einsetzen der Koordinaten in die Geradengleichung).

Bsp.: $g(x) = \frac{1}{2}x - 2$; $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$. Der Punkt $P(3|4)$ liegt nicht auf g, da $g(3) = -0{,}5 \neq 4$. Der Punkt $Q(4|0)$ liegt auf g, denn $g(4) = 0$.

Geradengleichung aus 2 Punkten aufstellen

Eine Gerade $g(x) = y = mx + t$ soll durch zwei Punkte $A(x_A|y_A)$ und $B(x_B|y_B)$ verlaufen.

1. Steigung: $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$
2. y-Achsenabschnitt: $y_A = m \cdot x_A + t$ diese Gleichung nach t auflösen.

Bsp.: $A(3|4)$ und $B(-1|-2)$. Die Steigung $m = \frac{-2-4}{-1-3} = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2}$. Somit lautet die Geradengleichung $g: y = \frac{3}{2}x + t$. Man kennt den Punkt $A(3|4)$ der Geraden: $4 = \frac{3}{2} \cdot 3 + t$. Löst man nach t auf, so erhält man $t = -\frac{1}{2}$.

Schnittpunkt S zweier Geraden berechnen

Die gemeinsamen Punkte zweier linearer Funktionen $f: x \longmapsto y$ und $g: x \longmapsto y$ entsprechen den Schnittpunkten der zugehörigen Geraden. Zwei lineare Funktionen können entweder **genau einen**, **keinen** oder **unendlich viele** gemeinsame Punkte besitzen.

Man erhält die x-Koordinate des Schnittpunktes, indem man die beiden Funktionsterme der linearen Funktionen gleichsetzt:

$$f(x) = g(x)$$

Die y-Koordinate des Schnittpunktes erhält man, indem man die x-Koordinate in einen der beiden Funktionsterme einsetzt.

Bsp.: $g(x) = \frac{1}{2}x - 2$ und $f(x) = -3x$. Gleichsetzen der Funktionsterme liefert die x-Koordinate des Schnittpunktes:

$$-3x = \frac{1}{2}x - 2$$

Man erhält $x = \frac{4}{7}$. Setzt man nun z.B. in $f(x)$ ein ergibt sich für die y-Koordinate des Schnittpunktes: $y = -3 \cdot \frac{4}{7} = -\frac{12}{7}$. Somit lautet $S(\frac{4}{7} \mid -\frac{12}{7})$.

Lineare Gleichungssysteme mit 2 Unbekannten

Bsp.: $\begin{array}{ll} (I) & -10x + 18y = -16 \\ (II) & 5x - 3y \;= 6 \end{array} \Rightarrow \mathbb{L} = \left\{1 \mid -\frac{1}{3}\right\}$

Graphische Lösung

Zugehörige Geraden in der Form $\mathrm{y = mx + t}$ einzeichnen. Der Schnittpunkt der beiden Geraden ergibt die Lösungsmenge.

Gleichsetzungsverfahren

Zugehörige Geraden in der Form $\mathrm{y = mx + t}$ angeben. Der Schnittpunkt der beiden Geraden ergibt die Lösungsmenge.

$$\begin{array}{ll} (I) & y = \frac{10}{18}x - \frac{16}{18} \\ (II) & y = \frac{5}{3}x - \frac{6}{3} \end{array}$$

Additionsverfahren

Falls nötig, erst mit geeignetem Faktor multiplizieren, damit Koeffizienten dem Betrag nach gleich sind. Z.B. (I) mit 2 multiplizieren:

$$\begin{array}{lll} (I) & -10x + 18y = -16 & \\ (II) & 5x - 3y \;= 6 & (II) \cdot 2 \\ (II)' & 10x - 6y = 12 & \end{array}$$

$$(I) + (II)' \quad 12y = -4 \quad \Rightarrow y = -\frac{1}{3} \;\; in\ (II)$$

$$5x - 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = 6 \quad \Rightarrow x = 1$$

Anzahl der Lösungen

- Genau eine Lösung (Die Geraden schneiden sich)
- Keine Lösung (Die Geraden sind echt parallel)
- Unendlich viele Lösungen (Die Geraden sind identisch)