GRUNDWISSEN 8. KLASSE – EINHEIT 2

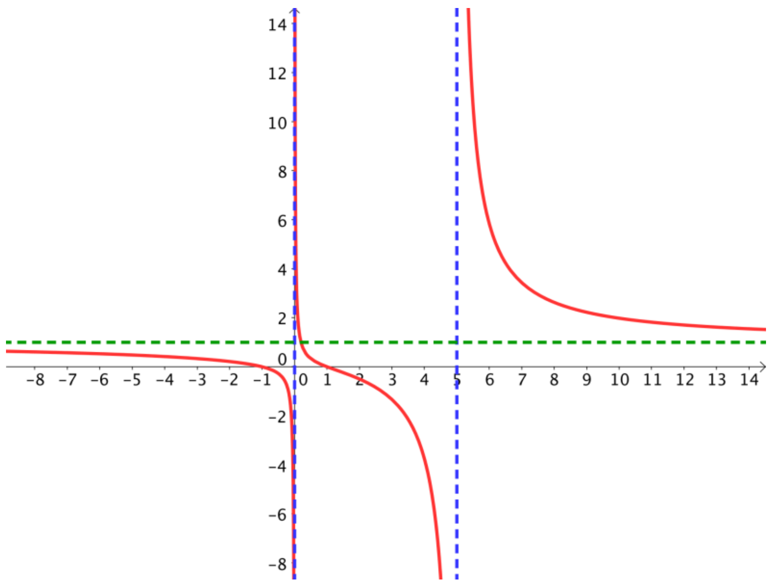
GEBROCHEN-RATIONALE FUNKTIONEN, BRUCHGLEICHUNGEN LÖSEN, POTENZEN MIT GANZZAHLIGEM EXPONENTEN

GEBROCHEN-RATIONALE FUNKTIONEN

Grundlagen

Gebrochen-rationale Funktionen $f(x)$ haben meist eine Variable bzw. einen Term mit einer Variablen z.B. x im Nenner. Die Definitionslücken x_1, x_2 usw. einer gebrochen-rationalen Funktion, sind die x-Werte, für die der Nennerterm Null wird. Die maximale Definitionsmenge D_f ergibt sich dann zu $D_f = \mathbb{R} \setminus \{x_1; x_2; \ldots\}$. Die Nullstellen einer gebrochen-rationalen Funktion sind die Nullstellen des Zählerterms. Oft sind Hyperbeln Teile der Graphen gebrochen-rationaler Funktionen.

Bsp.: $f(x) = \frac{x^2-1}{(x-5)x}$; Die Funktion $f(x)$ hat die Definitionslücken $x_1 = 5$ und $x_2 = 0$, da für diese Werte der Nennerterm $N(x) = (x-5)x$ den Wert Null annimmt. Die maximale Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0; 5\}$. Die Nullstellen der Funktion $f(x)$ sind die Nullstellen des Zählerterms $Z(x) = x^2 - 1$. Diese lauten $x_0 = \pm 1$.



Asymptoten

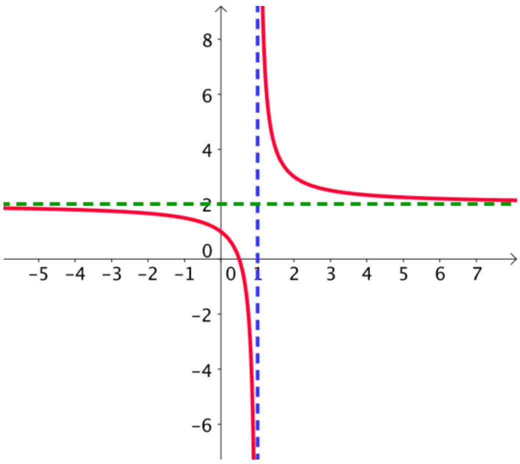
Die blauen Geraden sind senkrechte Asymptoten. Die grüne Gerade heißt waagrechte Asymptote. Die senkrechten Asymptoten sind parallel zur y-Achse und verlaufen durch die Definitionslücken. Die waagrechte Asymptote ist parallel zur x-Achse und gibt die Verschiebung in y-Richtung an.

Die allgemeine Form einer einfachen gebrochen-rationalen Funktion lautet

$$f(x) = \frac{c}{x-a} + b$$

wobei a die Lage der senkrechten und b die Lage der waagrechten Asymptote angeben. Die Zahl c gibt an wie stark die Hyperbel gekrümmt ist.

Bsp.: $f(x) = \frac{1}{(x-1)} + 2$; Die Funktion $f(x)$ hat die Definitionslücke $x_1 = 1$ und ist um zwei Einheiten in positive y-Richtung verschoben. Die waagrechte und senkrechte Asymptote bilden zusammen eines neues Koordinatensystem.



BRUCHGLEICHUNGEN LÖSEN

Beim Berechnen der Schnittpunkte zweier gebrochen-rationaler Funktionen entsteht eine Bruchgleichung:

$$f(x) = \frac{c}{x-a} + b = \frac{d}{x-e} + h = g(x)$$

$$\frac{c}{x-a} + b = \frac{d}{x-e} + h$$

Durch Lösen der Gleichung erhält man die x-Koordinaten der Schnittpunkte der beiden Funktionsgraphen G_f und G_g.

Bsp.: $f(x) = \frac{x-1}{(x-5)x}$ wird geschnitten mit $g(x) = \frac{x+2}{x}$. Man erhält dann die Bruchgleichung:

$$\frac{x-1}{(x-5)x} = \frac{x+2}{x}$$

im 1. Schritt multipliziert man beide Seiten der Gleichung mit dem gemeinsamen Nenner $(x-5)x$ der beiden Brüche:

$$\frac{x-1}{(x-5)x}(x-5)x = \frac{x+2}{x}(x-5)x$$

Im 2. Schritt kann man nun auf beiden Seiten kürzen und erhält eine bruchfreie Gleichung, die man nun lösen kann:

$$x - 1 = (x+2)(x-5)$$
$$x - 1 = x^2 - 5x + 2x - 10$$
$$0 = x^2 - 4x - 9$$

Potenzen mit ganzzahligem Exponenten

Potenzen bestehen aus der Basis a und dem Exponenten n. Dabei bedeutet für $n \in \mathbb{N}$:

$$a^n = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}$$

Ist $n \in \mathbb{Z}$ so bedeutet:

$$a^n = \begin{cases} a^n \; für \; n > 0 \\ 1 \; für \; n = 0 \\ \frac{1}{a^{|n|}} \; für \; n < 0 \end{cases}$$

Bsp.: $3^{-2} = \frac{1}{3^{|-2|}} = \frac{1}{3^2}$ und $a^0 = 1$ für alle $a \in \mathbb{R}$.

Rechengesetze

Für x, $\in \mathbb{Z}$ und a, b $\neq 0$ gilt:

1. Potenzgesetz (gleiche Basis)	2. Potenzgesetz (gleicher Exponent)	3. Potenzgesetz (Potenz einer Potenz)
$\boldsymbol{a^x \cdot a^y = a^{x+y}}$	$\boldsymbol{a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x}$	$\boldsymbol{(a^x)^y = a^{x \cdot y}}$
$\boldsymbol{a^x : a^y = a^{x-y}}$	$\boldsymbol{a^x : b^x = (a : b)^x}$	